ITA 2010

INSTITUTO TECNOLÓGICO
DA AERONÁUTICA

GABARITO DA PROVA OBJETIVA E DISCURSIVA

Realizada em 17 de Dezembro de 2009

[redacted]

NOTAÇÕES

IN = {1, 2, 3, ...}

IR : conjunto dos números reais

[a, b] = {$x \in$ IR; $a \le x \le b$}

[a, b[= {$x \in$ IR; $a \le x < b$}

]a, b[= {$x \in$ IR; $a < x < b$}

A\B = {x; $x \in$ A e $x \notin$ B}

$\sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_k, k \in$ IN

$\sum_{n=0}^{k} a_n x^n = a_0 + a_1 x + ... + a_k x^k, k \in$ IN

$\mathbb{C}$: conjunto dos números complexos

i : unidade imaginária: $i^2 = -1$

| z | : módulo do número $z \in \mathbb{C}$

$\bar{z}$: conjugado do número $z \in \mathbb{C}$

M_{mxn}(IR) : conjunto das matrizes reais m x n

det A : determinante da matriz A

A^t : transposta da matriz A

A^{-1} : inversa da matriz inversível A

P(A) : conjunto de todos os subconjuntos do conjunto A

n(A) : número de elementos do conjunto finito A

Arg z : argumento principal de $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, Arg $z \in [0, 2\pi[$

$f \circ g$: função composta das funções *f* e g

$f \cdot g$: produto das funções *f* e g

Observação: Os sistemas de coordenadas considerados são cartesianos retangulares.

Questão 01 **LETRA E**

Considere as afirmações abaixo relativas a conjuntos A, B e C quaisquer:

I. A negação de $x \in A \cap B$ é: $x \notin A$ ou $x \notin B$.

II. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

III. $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Destas, é (são) falsa(s)

(A) Apenas I

(B) apenas II

(C) apenas III

(D) apenas I e III

(E) apenas nenhuma.

Questão 02 **LETRA C**

Considere conjuntos A, $B \subset$ IR e $C \subset (A \cup B)$. Se $A \cup B$, $A \cap C$ e $B \cap C$ são os domínios das funções reais definidas por $\ln(x - \sqrt{\pi})$, $\sqrt{-x^2 + 6x - 8}$ e $\sqrt{\frac{x-\pi}{5-x}}$, respectivamente, pode-se afirmar que

(A) C = $]\sqrt{\pi}, 5[$

(B) C = $[2, \pi]$

(C) C = [2, 5[

(D) C = $[\pi, 4]$

(E) C não é intervalo.

Questão 03 **LETRA E**

Se z é uma solução da equação em $\mathbb{C}$,

$$z - \bar{z} + |z|^2 = -\left[\left(\sqrt{2} + i\right)\left(\frac{\sqrt{2}-1}{3} - i\frac{\sqrt{2}+1}{3}\right)\right]^{12}$$ pode-se afirmar que

(A) $i(z - \bar{z}) < 0$

(B) $i(z - \bar{z}) > 0$

(C) $|z| \in [5, 6]$

(D) $|z| \in [6, 7]$

(E) $\left|z + \frac{1}{z}\right| > 8$

Questão 04 **LETRA C**

Os argumentos principais das soluções da equação em z, $iz + 3\bar{z} + (z + \bar{z})^2 - i = 0$, pertencem a

(A) $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[$ (B) $\left]\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right[$

(C) $\left]\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right[$ (D) $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\right[$

(E) $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right[$

Questão 05 **LETRA D**

Considere a progressão aritmética (a_1, a_2, ..., a_{50}) de razão d. Se $\sum_{n=1}^{10} a_n = 10 + 25d$ e $\sum_{n=1}^{50} a_n = 4550$, então $d - a_1$ é igual a

(A)3 (B) 6 (C) 9 (D) 11 (E) 14

Questão 06 **LETRA D**

Sejam f, g : R → R tais que f é par e g é ímpar. Das seguintes afirmações
I. $f \cdot g$ é ímpar,
II. $f \circ g$ é par,
III. $g \circ f$ é ímpar,

é (são) verdadeira(s)
(A) apenas I
(B) apenas II
(C) apenas III
(D) apenas I e II
(E) todas.

Questão 07 **LETRA B**

A equação em x,

$$\operatorname{arctg}(e^x + 2) - \operatorname{arccotg}\left(\frac{e^x}{e^{2x} - 1}\right) = \frac{\pi}{4}, \ x \in \text{IR} \setminus \{0\},$$

(A) admite infinitas soluções, todas positivas.
(B) admite uma única solução, e esta é positiva.
(C) admite três soluções que se encontram no intervalo $\left]-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right[$.
(D) admite apenas soluções negativas.
(E) não admite solução.

Questão 08 **LETRA C**

Sabe-se que o polinômio $p(x) = x^5 - ax^3 + ax^2 - 1$, $a \in$ IR, admite a raiz $-i$.
Considere as seguintes afirmações sobre as raízes de p:
I. Quatro das raízes são imaginárias puras.
II. Uma das raízes tem multiplicidade dois.
III. Apenas uma das raízes é real.

Destas, é (são) verdadeira(s) apenas
(A) I
(B) II
(C) III
(D) I e III
(E) II e II

Questão 09 **LETRA A**

Um polinômio real $p(x) = \sum_{n=0}^{5} a_n x^n$, com $a_5 = 4$, tem três raízes reais distintas, a, b e c, que satisfazem o sistema

$$\begin{cases} a + 2b + 5c = 0 \\ a + 4b + 2c = 6 \\ 2a + 2b + 2c = 5 \end{cases}$$

Sabendo que a maior das raízes é simples e as demais têm multiplicidade dois, pode-se afirmar que p(1) é igual a

(A) –4
(B) –2
(C) 2
(D) 4
(E) 6

Questão 10 **LETRA E**

Considere o polinômio $p(x) = \sum_{n=0}^{15} a_n x^n$ com coeficientes $a_0 = -1$ e $a_n = 1 + i\, a_{n-1}$, $n = 1, 2, ..., 15$. Das afirmações:

I. $p(-1) \notin \mathbb{R}$,
II. $|\, p(x)\,| \leq 4\,(3 + \sqrt{2} + \sqrt{5}),\ \forall x \in [-1, 1]$
III. $a_8 = a_4$

é (são) verdadeira(s) apenas

(A) I
(B) II
(C) III
(D) I e II
(E) II e III

Questão 11 **LETRA B**

A expressão $(2\sqrt{3} + \sqrt{5})^5 - (2\sqrt{3} - \sqrt{5})^5$ é igual a

(A) $2630\sqrt{5}$
(B) $2690\sqrt{5}$
(C) $2712\sqrt{5}$
(D) $1584\sqrt{15}$
(E) $1604\sqrt{15}$

Questão 12 **LETRA A**

Um palco possui 6 refletores de iluminação. Num certo instante de um espetáculo moderno os refletores são acionados aleatoriamente de modo que, para cada um dos refletores, seja de $\frac{2}{3}$ a probabilidade de ser aceso. Então, a probabilidade de que, neste instante, 4 ou 5 refletores sejam acesos simultaneamente, é igual a

(A) $\frac{16}{27}$

(B) $\frac{49}{81}$

(C) $\frac{151}{243}$

(D) $\frac{479}{729}$

(E) $\frac{2^4}{3^4} + \frac{2^5}{3^5}$.

Questão 13 **LETRA D**

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & a_6 \end{bmatrix} \in M_{3x3}(IR),$$

em que $a_4 = 10$, $\det A = -1000$ e a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 e a_6 formam, nesta ordem, uma progressão aritmética de razão $d > 0$. Pode-se afirmar que $\frac{a_1}{d}$ é igual a

(A) –4
(B) –3
(C) –2
(D) –1
(E) 1

Questão 14 **LETRA C**

Sobre os elementos da matriz

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_{4x4}(IR)$$

sabe-se que (x_1, x_2, x_3, x_4) e (y_1, y_2, y_3, y_4) são duas progressões geométricas de razão 3 e 4 e de soma 80 e 255, respectivamente. Então, $\det(A^{-1})$ e o elemento $(A^{-1})_{23}$ valem, respectivamente,

(A) $\frac{1}{72}$ e 12

(B) $-\frac{1}{72}$ e -12

(C) $-\frac{1}{72}$ e 12

(D) $-\frac{1}{72}$ e $\frac{1}{12}$

(E) $\frac{1}{72}$ e $\frac{1}{12}$

Questão 15 **LETRA A**

O valor da soma $\sum_{n=1}^{6} \text{sen}\left(\frac{2\alpha}{3^n}\right)\text{sen}\left(\frac{\alpha}{3^n}\right)$, para todo $\alpha \in$ IR, é igual a

(A) $\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{729}\right) - \cos\alpha\right]$

(B) $\frac{1}{2}\left[\text{sen}\left(\frac{\alpha}{243}\right) - \text{sen}\left(\frac{\alpha}{729}\right)\right]$

(C) $\cos\left(\frac{\alpha}{243}\right) - \cos\left(\frac{\alpha}{729}\right)$

(D) $\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{729}\right) - \cos\left(\frac{\alpha}{243}\right)\right]$

(E) $\cos\left(\frac{\alpha}{729}\right) - \cos\alpha$

Questão 16 **LETRA B**

Se os números reais α e β, com $\alpha + \beta = \frac{4\pi}{3}$, $0 \le \alpha \le \beta$, maximizam a soma senα + senβ, então α é igual a

(A) $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$ (B) $\frac{2\pi}{3}$ (C) $\frac{3\pi}{5}$ (D) $\frac{5\pi}{8}$ (E) $\frac{7\pi}{12}$

Questão 17 **LETRA A**

Considere as circunferências

$$C_1 : (x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 4 \text{ e } C_2 : (x - 10)^2 + (y - 11)^2 = 9.$$

Seja r uma reta tangente interna a C_1 e C_2, isto é, r tangencia C_1 e C_2 e intercepta o segmento de reta $\overline{O_1O_2}$ definido pelos centros O_1 de C_1 e O_2 de C_2. Os pontos de tangência definem um segmento sobre r que mede

(A) $5\sqrt{3}$

(B) $4\sqrt{5}$

(C) $3\sqrt{6}$

(D) $\frac{25}{3}$

(E) 9

Questão 18 **LETRA D**

Um cilindro reto de altura $\frac{\sqrt{6}}{3}$ cm está inscrito num tetraedro regular e tem sua base em uma das faces do tetraedro. Se as arestas do tetraedro medem 3cm, o volume do cilindro, em cm^3, é igual a

(A) $\frac{\pi\sqrt{3}}{4}$ (B) $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$ (C) $\frac{\pi\sqrt{6}}{6}$ (D) $\frac{\pi\sqrt{6}}{9}$ (E) $\frac{\pi}{3}$

Questão 19 **LETRA E**

Um triângulo eqüilátero tem os vértices nos pontos A, B e C do plano xOy, sendo B = (2, 1) e C = (5, 5). Das seguintes afirmações:

I. A se encontra sobre a reta $y = -\frac{3}{4}x + \frac{11}{2}$

II. A está na intersecção da reta $y = -\frac{3}{4}x + \frac{45}{8}$ com a circunferência $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$,

III. A pertence às circunferências $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$ e $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + (y - 3)^2 = \frac{75}{4}$, é (são) verdadeira(s) apenas

(A) I (B) II (C) III (D) I e II (E) II e III

Questão 20 **LETRA B**

Sejam A, B, C e D os vértices de um tetraedro regular cujas arestas medem 1 cm. Se M é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ e N é o ponto médio do segmento $\overline{CD}$, então a área do triângulo MND, em cm^2, é igual a

(A) $\frac{\sqrt{2}}{6}$

(B) $\frac{\sqrt{2}}{8}$

(C) $\frac{\sqrt{3}}{6}$

(D) $\frac{\sqrt{3}}{8}$

(E) $\frac{\sqrt{3}}{9}$

Questão 21

Sejam A, B e C conjuntos tais que $C \subset B$, n(B\C) = 3n(B ∩ C) = 6n(A ∩ B), n(A ∪ B) = 22 e (n(C), n(A), n(B)) é uma progressão geométrica de razão r > 0.

a) Determine n(C)
b) Determine n(P(B\C)).

SOLUÇÃO:

Pelo enunciado, temos que $\begin{cases} n(B-C)=6x \\ n(B\cap C)=n(C)=2x \\ n(A\cap B)=x \end{cases}$.

Como $C \subset B$, temos $n(B)=n(C)+n(B-C)=2x+6x=8x$. Como $(n(C),n(A),n(B))=(2x,n(A),8x)$ é P.G., temos que $n(A)=4x$. Pelo princípio da inclusão-exclusão, temos $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$, daí, $22=4x+8x-x$, logo $x=2$.

a) $n(C)=2x$ implica $n(C)=4$.
b) $n(B-C)=6x=12$ implica $n(P(B-C))=2^{n(B-C)}=2^{12}=4096$.

Questão 22

A progressão geométrica infinita (a_1, a_2, ..., a_n, ...) tem razão r < 0. Sabe-se que a progressão infinita (a_1, a_6, ..., a_{5n+1}, ...) tem soma 8 e a progressão infinita (a_5, a_{10}, ..., a_{5n}, ...) tem soma 2. Determine a soma da progressão infinita (a_1, a_2, ..., a_n, ...).

SOLUÇÃO:

Usando a fórmula da PG Infinita, temos que $\frac{a_1}{1-q^5}=8$ e $\frac{a_1q^4}{1-q^5}=2$;

$$q^4=\frac{1}{4}=-\frac{1}{\sqrt{2}}(q<0) \text{ e } a_1=8(1-q^5)=8(1+\frac{1}{4\sqrt{2}})$$

$$\text{Logo } S=\frac{a_1}{1-q}=\frac{8(1+\frac{1}{4\sqrt{2}})}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{2(4\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}+1}=14-6\sqrt{2}$$

Questão 23

Analise se a função f : IR → IR, $f(x) = \dfrac{3^x - 3^{-x}}{2}$ é bijetora e, em caso afirmativo, determine a função inversa f^{-1}.

SOLUÇÃO:

$f(x) = \dfrac{3^x - 3^{-x}}{2}$ é crescente, portanto, é injetora. *f(x)* é continua, $\lim_{x->+\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x->-\infty} f(x) = -\infty$, portanto *f(x)* é sobrejetora.

Fazendo $a = 3^y$, temos que $x = \dfrac{a - \frac{1}{a}}{2} \Leftrightarrow 2x = \dfrac{a^2 - 1}{a} \Leftrightarrow a^2 - 2ax - 1 = 0$ logo, $a = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$**,** substituindo novamente, chegamos em $3^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$ e portanto $y = \log_3(x + \sqrt{x^2 + 1})$

Questão 24

Seja f : IR → IR bijetora e ímpar. Mostre que a função inversa f^{-1} : IR → IR também é ímpar.

SOLUÇÃO:

f é bijetora e portanto, $f(f^{-1}(x)) = x$ e $-f(f^{-1}(x)) = -x$, além disso f é impar $f(-f^{-1}(x)) = f(f^{-1}(-x))$, usando a injetividade podemos concluir que $-f^{-1}(x) = f^{-1}(-x)$ e portanto f^{-1} é ímpar.

Questão 25

Considere o polinômio p(x) = $\sum_{n=0}^{6} a_n x^n$, com coeficientes reais, sendo $a_0 \neq 0$ e $a_6 = 1$. Sabe-se que se r é raiz de p, –r também é raiz de p. Analise a veracidade ou falsidade das afirmações:

I. Se r_1 e r_2, $|r_1| \neq |r_2|$, são raízes reais e r_3 é raiz não real de p, então r_3 é imaginário puro.
II. Se r é raiz dupla de p, então r é real ou imaginário puro.
III. $a_0 < 0$.

SOLUÇÃO:

(I) Verdadeira
Temos como raízes reais $x_1, -x_1, x_2, -x_2, x_3$ e $-x_3$. Como $p(x)$ tem coeficientes reais e x_3 é raiz imaginária, $\bar{x}_3$ também é raiz. Assim, temos necessariamente que $\bar{x}_3 = -x_3$ o que indica que x_3 é imaginário puro.
(II) Falsa
Um contra-exemplo é o caso em que as raízes são $r, r, \bar{r}, \bar{r}, -r$ e $-\bar{r}$ (r é um complexo qualquer diferente de zero e não imaginário puro) satisfazendo as condições do problema. Um detalhe é que se r é raiz dupla, não necessariamente $-r$ também é.
(III) Falsa
Sabemos que o produto das raízes dessa equação é dado por $P = \dfrac{a_0}{a_6} = a_0$. Usando o caso citado acima, onde as raízes são $r, r, \bar{r}, \bar{r}, -r$ e $-\bar{r}$, temos que o produto das raízes é

$r \cdot \bar{r} \cdot r \cdot \bar{r} \cdot (-r) \cdot (-\bar{r}) = |r|^2 \cdot |r|^2 \cdot |-r|^2 > 0 \rightarrow a_0 > 0$

Questão 26

Uma urna de sorteio contém 90 bolas numeradas de 1 a 90, sendo que a retirada de uma bola é equiprovável à retirada de cada uma das demais.

a) Retira-se aleatoriamente uma das 90 bolas desta urna. Calcule a probabilidade de o número desta bola ser um múltiplo de 5 ou de 6.

b) Retira-se aleatoriamente uma das 90 bolas desta urna e, sem repô-la, retira-se uma segunda bola. Calcule a probabilidade de o número da segunda bola retirada não ser um múltiplo de 6.

SOLUÇÃO:

a) Sejam A o conjunto dos múltiplos de 6 e B o conjunto dos múltiplos de 5.

Veja que A possui $\frac{90}{6}=15$ elementos, B possui $\frac{90}{5}=18$ e $A\cap B$ possui $\frac{90}{30}=3$ (é o conjunto dos múltiplos de 30). Usando que $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$, temos $n(A\cup B)=15+18-3=30$. Portanto, a probabilidade de retirar um múltiplo de 5 ou de 6 é $\frac{30}{90}=\frac{1}{3}$.

b) Há dois casos: a 1ª bola pode ser múltipla de 6 ou não.

<u>1º caso</u>: 1ª bola é múltipla de 6 / 2ª bola não é múltipla de 6

$$P=\frac{15}{90}\cdot\frac{75}{89}$$

<u>2º caso</u>: 1ª bola é múltipla de 6 / 2ª bola não é múltipla de 6

$$P=\frac{75}{90}\cdot\frac{74}{89}$$

Então, a probabilidade é $P=\frac{15}{90}\cdot\frac{75}{89}+\frac{75}{90}\cdot\frac{74}{89}=\frac{445}{534}=\frac{5}{6}$

Questão 27

Considere as matrizes A ∈ M_{4x4}(IR) e X, B ∈ M_{4x1}(IR):

$$A=\begin{bmatrix} a & 1 & b & 1\\ b & 1 & a & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ -a & 2 & b & 1\end{bmatrix};\ X=\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\\ w\end{bmatrix}\ \text{e}\ B=\begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ b_3\\ b_4\end{bmatrix}$$

a) Encontre todos os valores reais de a e b tais que a equação matricial AX = B tenha solução única.

b) Se $a^2 - b^2 = 0$, $a \neq 0$ e $B = [1\ 1\ 2\ 4]^t$, encontre X tal que AX = B

SOLUÇÃO:

a) Para que o sistema tenha solução única (SPD), precisamos ter $\Delta\neq 0 \Leftrightarrow \det A\neq 0$. Fazendo Laplace na 3ª linha: $\det A=-2\begin{vmatrix} a & b & 1\\ b & a & 0\\ -a & b & 1\end{vmatrix}=-2(a^2+b^2+a^2-b^2)=-4a^2\neq 0\Leftrightarrow a\neq 0$.

b) Fazendo o produto das matrizes e montando o sistema, temos, pela 3ª equação, que $y=1$. Substituindo nas outras equações: $\begin{cases} ax+bz+w=0\ (i)\\ bx+az=0\ (ii)\\ -ax+bz+w=2\,(iii)\end{cases}$

Fazendo $(i)-(ii): 2ax=-2\Leftrightarrow x=-\frac{1}{a}$.

Substituindo em (ii): $b\cdot\left(-\frac{1}{a}\right)+az=0\Leftrightarrow z=\frac{b}{a^2}=\frac{b}{b^2}=\frac{1}{b}$.

Em (i): $\underbrace{a\cdot\left(-\frac{1}{a}\right)}_{-1}+\underbrace{b\cdot\left(\frac{b}{a^2}\right)}_{1}+w=0\Leftrightarrow w=0$. Solução: $(x,y,z,w)=\left(-\frac{1}{a},1,\frac{1}{b},0\right)$.

Questão 28

Considere a equação (3 – 2cos^{2}x) $\left(1+\text{tg}^2\,\dfrac{x}{2}\right)$ – 6 tg $\dfrac{x}{2} = 0$.

a) Determine todas as soluções x no intervalo [0, π[.
b) Para as soluções encontradas em a), determine cotg x.

SOLUÇÃO:
a)

1ª solução: Usando que $1+\tan^2\dfrac{x}{2}=\sec^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{x}{2}}$, a equação é equivalente a

$\left(3-2\cos^2 x\right)\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{x}{2}}=6\dfrac{\text{sen}\dfrac{x}{2}}{\cos\dfrac{x}{2}}$, ou seja, $\left(3-2\cos^2 x\right)=6\text{sen}\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}=3\text{sen}x$. Pela relação fundamental, temos $3-2\left(1-\text{sen}^2 x\right)=3\text{sen}x$, que dá a equação $2\text{sen}^2 x-3\text{sen}x+1=0$, que tem soluções $\text{sen}x=1$ ou $\text{sen}x=\dfrac{1}{2}$. No intervalo $[0,\pi[$, temos $S=\left\{\dfrac{\pi}{2},\dfrac{5\pi}{6},\dfrac{\pi}{6}\right\}$.

2ª solução: Vamos usar que $\cos x=\dfrac{1-\tan^2\dfrac{x}{2}}{1+\tan^2\dfrac{x}{2}}$. Fazendo $t=\tan\dfrac{x}{2}$, a equação é

$\left(3-2\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2\right)\left(1+t^2\right)-6t=0$. Simplificando, temos $t^4-6t^3+10t^2-6t+1=0$ (eq. Recíproca). Dividindo por t^2, temos $\left(t^2+\dfrac{1}{t^2}\right)-6\left(t+\dfrac{1}{t}\right)+10=0$. Fazendo $t+\dfrac{1}{t}=a$, temos $t^2+\dfrac{1}{t^2}=a^2-2$. Daí, $\left(a^2-2\right)-6a+10=0\Rightarrow a^2-6a+8=0$, ou seja, $a=2$ ou $a=4$.

Se $a=2$, temos $t+\dfrac{1}{t}=2\Rightarrow t^2-2t+1=0\Rightarrow t=1$. Então, $\tan\dfrac{x}{2}=1$, o que dá $\dfrac{x}{2}=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$ (k inteiro).

Se $a=4$, temos $t+\dfrac{1}{t}=4\Rightarrow t^2-4t+1=0\Rightarrow t=2\pm\sqrt{3}$. Então, $\tan\dfrac{x}{2}=2\pm\sqrt{3}$ (*). Lembremos que $2+\sqrt{3}=\tan\dfrac{5\pi}{12}$ e $2-\sqrt{3}=\tan\dfrac{\pi}{12}$. Usando (*), temos que $\dfrac{x}{2}=\dfrac{5\pi}{12}+k\pi$ ou $\dfrac{x}{2}=\dfrac{\pi}{12}+k\pi$ (k inteiro).

Como $\dfrac{x}{2}\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, podemos ter apenas $\dfrac{x}{2}=\dfrac{\pi}{4}$ ou $\dfrac{x}{2}=\dfrac{5\pi}{12}$ ou $\dfrac{x}{2}=\dfrac{\pi}{12}$. Encontrando os valores de x, temos que $S=\left\{\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2},\dfrac{5\pi}{6}\right\}$.

b) $\cot\dfrac{\pi}{2}=0$, $\cot\dfrac{\pi}{6}=\sqrt{3}$, $\cot\dfrac{5\pi}{6}=-\sqrt{3}$.

Questão 29

Determine uma equação da circunferência inscrita no triângulo cujos vértices são A = (1, 1), B = (1, 7) e C = (5, 4) no plano xOy.

SOLUÇÃO:

Calculando os lados do triângulo, temos $AB=6$, $AC=BC=5$. Sejam r o raio do incírculo e I seu centro. Como A e B têm a mesma abscissa, AB é vertical. Além disso, como o triângulo é isósceles, I está na mesma altura de C. Portanto:

$\begin{cases} x_I = x_A + r = 1 + r \\ y_I = y_C = 4 \end{cases}$ (*). Falta determinar *r*.

O semiperímetro *p* do triângulo é 8. Usando o radical de Heron, temos $S = \sqrt{8 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} = 12$ (área do triângulo). Como $S = pr$, temos $r = \frac{3}{2}$. Em (*), $\begin{cases} x_I = \frac{5}{2} \\ y_I = 4 \end{cases}$.

Então, uma equação para o incírculo é $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y-4)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2$.

Questão 30

As superfícies de duas esferas se interceptam ortogonalmente (isto é, em cada ponto da intersecção os respectivos planos tangentes são perpendiculares). Sabendo que os raios destas esferas medem 2 cm e $\frac{3}{2}$ cm, respectivamente, calcule

a) a distância entre os centros das duas esferas.

b) a área da superfície do sólido obtido pela intersecção das duas esferas.

SOLUÇÃO:

a) Como as esferas são ortogonais, temos $d^2 = R^2 + r^2$ (Pitágoras).

No problema, temos $d = \sqrt{2^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{5}{2}$ cm.

b) Sejam h_1 e h_2 as flechas relativas ao plano comum às esferas, nas esferas 1 e 2 (de raios 2 e 3/2 respectivamente). Lembrando que a fórmula de área de um segmento esférico é $2\pi Rh$, temos que a área pedida é $S = 2\pi \cdot 2 \cdot h_1 + 2\pi \cdot \frac{3}{2} \cdot h_2 = \pi(4h_1 + 3h_2)$ (*). Sejam O e O’ os centros das esferas e A um ponto na interseção delas. Este triângulo é retângulo de hipotenusa OO’. Considere $OA = 2$ e $O'A = \frac{3}{2}$. As projeções dos catetos sobre a hipotenusa são iguais a $m = \frac{2^2}{5/2} = \frac{8}{5}$ e $n = \frac{(3/2)^2}{5/2} = \frac{9}{10}$. Daí, as flechas são:

$h_1 = 2 - m = 2 - \frac{8}{5} = \frac{2}{5}$ e $h_2 = \frac{3}{2} - n = \frac{3}{2} - \frac{9}{10} = \frac{3}{5}$.

Substituindo em (*), temos $S = \pi(4h_1 + 3h_2) = \pi\left(4 \cdot \frac{2}{5} + 3 \cdot \frac{3}{5}\right) = \frac{17}{5}\pi$ cm²

Comentários da prova

A prova esse ano veio bem equilibrada, com algumas questões trabalhosas, como a 10 e 19. O assunto logaritmo foi pouco abordado, diferentemente de trigonometria e polinômio que foram exploradas em abundância. A banca do ITA está mais uma vez de parabéns pela boa prova.

Equipe Pensi
Celso Ramos
Daniel Fadel
Moyses Cohen
Rodrigo Villard